信息经济学

第二课：最优反应和纳什均衡

彭世喆

数字经济系
长沙理工大学经济与管理学院

2024 年 3 月 7 日

点球游戏

- 玩家：射手和守门员
- 策略集：$\{L, M, R\}$ 和 $\{\ell, r\}$，不考虑守门员站着不动的情况
- 考虑如下效用矩阵[1]
- 结果统计（不存在占优策略）

		守门员 ℓ	守门员 r
射手	L	$4, -4$	$9, -9$
射手	M	$7, -7$	$7, -7$
射手	R	$9, -9$	$4, -4$

[1] $u_1(L, \ell) = 4$ 表示进球概率为 40%。守门员的效用是负数，越大越好。

新的方法——最优反应

- 最优反应（Best response）
  - 策略 R 是策略 ℓ 的最优反应（假设对手选 ℓ）
  - 策略 L 是策略 r 的最优反应（假设对手选 r）
  - 策略 M 不是任何策略的最优反应，但不能剔除策略 M

守门员

射手		ℓ	r
	L	$4, -4$	$9, -9$
	M	$7, -7$	$7, -7$
	R	$9, -9$	$4, -4$

新的方法——期望效用最大化

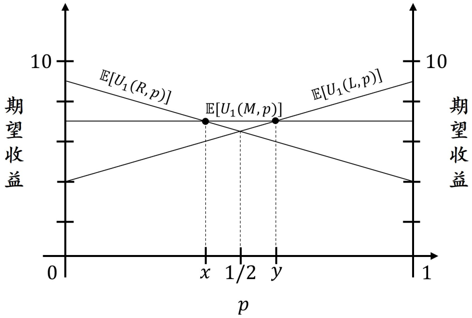
- 如果不知道对手会选什么策略呢？
- 假设对手等可能选择 ℓ 和 r
  - 策略 L 的期望效用 $=\frac{1}{2}*4+\frac{1}{2}*9=\frac{13}{2}$
  - 策略 M 的期望效用 $=\frac{1}{2}*7+\frac{1}{2}*7=7$
  - 策略 R 的期望效用 $=\frac{1}{2}*9+\frac{1}{2}*4=\frac{13}{2}$

守门员

射手		ℓ	r
	L	$4,-4$	$9,-9$
	M	$7,-7$	$7,-7$
	R	$9,-9$	$4,-4$

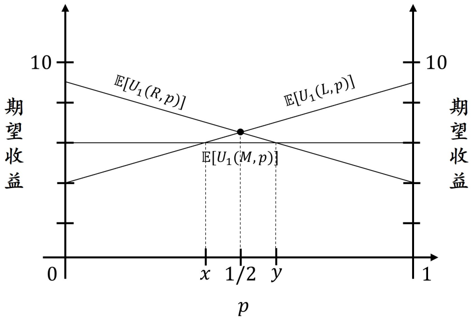
新的方法——效用最大化

- 假设对手选择 ℓ 和 r 的概率分别为 $1-p$ 和 p
  - $\mathbb{E}[u_1(L,p)] = (1-p)*4 + p*9 = 4+5p$
  - $\mathbb{E}[u_1(M,p)] = (1-p)*7 + p*7 = 7$
  - $\mathbb{E}[u_1(R,p)] = (1-p)*9 + p*4 = 9-5p$
  - 最优期望效用 $= \max\{\mathbb{E}[u_1(U,p)], \mathbb{E}[u_1(M,p)], \mathbb{E}[u_1(R,p)]\}$
  - 求得 $x = 2/5$ 和 $y = 3/5$
  - 当 $0 \le p < 2/5$，最优反应是 R；当 $2/5 \le p < 3/5$，最优反应是 M；当 $3/5 \le p \le 1$，最优反应是 L



比较静态分析

- 射中门的命中率由 70% 下降至 60%
  - $\mathbb{E}[u_1(M,p)] = (1-p)*6 + p*6 = 6$
- 策略 M 不是任何信念下的最优反应。因此，尽管没有占优策略，也可以剔除策略 M



最优反应

定义 1（最优反应）

如果对于玩家 i 的所有策略 $s_i' \in S_i$，$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ 成立，即 $s_i^* = \underset{s_i}{\operatorname{argmax}}\, u_i(s_i, s_{-i})$，则称策略 s_i^* 是给定 s_{-i} 下的一个最优反应。

定义 2（最优反应）

如果对于玩家 i 的所有策略 $s_i' \in S_i$ 以及关于其他玩家策略选择的信念 p，$\mathbb{E}[u_i(s_i^*, p)] \geq \mathbb{E}[u_i(s_i', p)]$ 成立，即 $s_i^* = \underset{s_i}{\operatorname{argmax}}\, \mathbb{E}[u_i(s_i, p)]$，则称策略 s_i^* 是信念 p 的一个最优反应。

经验 6

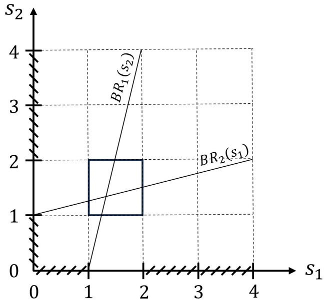
不要选择在任何信念下都不是最优反应的策略。

合作游戏

- 两个合伙人一起经营一家公司，利润按五五分成
- 每人选择自己经营公司的努力程度 $s_i \in [0, 4]$，s_i 是一个连续型决策变量
- 努力成本为 s_i^2
- 公司利润 $= 4(s_1 + s_2 + bs_1 s_2)$，$0 \leq b \leq 1/4$
  - 交叉项 $bs_1 s_2$ 代表合作产生的协同效应（“$1 + 1 > 2$”，并且 s_2 越大，多投入一个单位的 s_1 产生的边际效应就越大）
  - 若没有交叉项，则决策与他人无关
- 合伙人 i 的效用 $u_i(s_1, s_2) = \frac{1}{2} * 4(s_1 + s_2 + bs_1 s_2) - s_i^2$

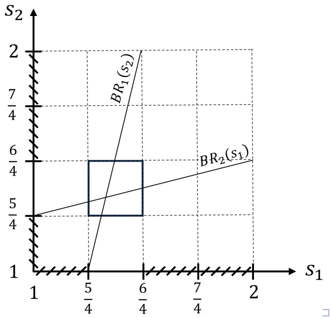
分析

- 合伙人 1 需要求解 $\max_{s_1} 2(s_1 + s_2 + bs_1 s_2) - s_1^2$
  - 一阶条件：$2(1 + bs_2) - 2s_1 = 0$
  - 二阶条件：$-2 < 0$
  - 求得 $s_1^* = 1 + bs_2 = BR_1(s_2)$
  - 类似地，求得 $s_2^* = 1 + bs_1 = BR_2(s_1)$
- 画出当 $b = 1/4$ 时的 $BR_1(s_2)$ 和 $BR_2(s_1)$
- 由于 $s_i \in [0, 4]$，数轴上被划去的部分永远不是一个最优反应



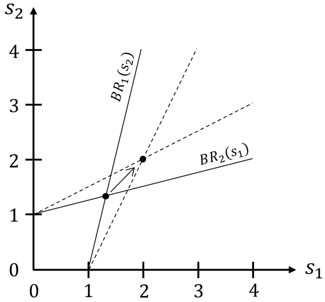
分析

- 把方框里的图像放大，进行类似推理
- 数轴上被划去的部分是某些情形下的最优反应，但这些情形永远不会发生
- 最终方框会缩小成一个点 (s_1^*, s_2^*)
  - $s_1^* = 1 + bs_2^*$ 和 $s_2^* = 1 + bs_1^*$
  - 解得 $s_1^* = s_2^* = \frac{1}{1-b} \approx 1.33$
  - 这个努力程度比较小，还能改进效率吗？



外部性（Externality）

- 一方增加一单位的努力，要承担所有增加的努力成本，但只收到了增加效用的一半
- 这种低效导致了低水平的努力程度
- 外部性意味着我的努力不仅对我还对你有益
- 增加 b 至 $1/2$ 以提高外部性，以两人小组作业为例



纳什均衡（Nash equilibrium）

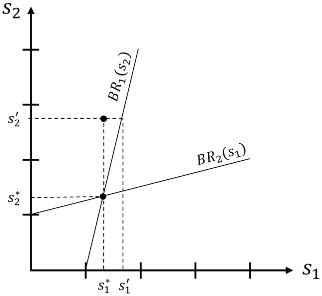
- 合作游戏中两条直线的交点说明两个合伙人都选择了给定对方选择下的最优反应，且都没有动机偏离
- 数字选择游戏中的纳什均衡是所有人都选择 1

定义（纳什均衡）

如果对于每一个玩家 i，其策略 s_i^* 是给定其他玩家策略 s_{-i}^* 下的一个最优反应，则策略组合 $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_N^*)$ 是一个纳什均衡。

纳什均衡

- 动机
  - 在纳什均衡下，玩家回顾时不会后悔当初的选择，因为不能通过改变选择变得更好（strictly better）
  - 玩家 1 原本以为玩家 2 会选择 s_2^* 从而选择了 s_1^*，但实际玩家 2 选择了 s_2'，则玩家 1 会后悔，应该选择 s_1' 的
  - 是稳定的。不需要外力，纳什均衡可以自我实现。即如果每个人都相信大家都会遵守纳什均衡，则没有人会偏离



如何找到纳什均衡

- 猜测法、图像法、推导法（并非所有情况都能找到纳什均衡）
- 考虑如下效用矩阵
- 确定所有最优对策（用下划线标记），找到最优对策的重合之处
- 没有劣势策略， $NE=(D,r)$

玩家 2

		ℓ	c	r
	U	$0,\underline{4}$	$\underline{4},0$	$5,3$
玩家 1	M	$\underline{4},0$	$0,\underline{4}$	$5,3$
	D	$3,5$	$3,5$	$\underline{6},\underline{6}$

如何找到纳什均衡

- 一个理性人不一定会选择纳什均衡中的策略
  - 此人可能认为对手会选择其他策略，选择被信念合理化
  - 玩家 1 认为玩家 2 会选择 ℓ，所以选择 M
  - 玩家 1 认为玩家 2 认为玩家 1 会选择 U，所以选择 M
  - 玩家 1 认为玩家 2 认为玩家 1 认为玩家 2 会选择 c，所以选择 M；……（每一步都是理性的）

		玩家 2 ℓ	c	r
	U	$0, \underline{4}$	$\underline{4}, 0$	$5, 3$
玩家 1	M	$\underline{4}, 0$	$0, \underline{4}$	$5, 3$
	D	$3, 5$	$3, 5$	$\underline{6}, \underline{6}$

如何找到纳什均衡

- 考虑如下效用矩阵
- 最优反应可能不唯一，如 $BR_2(U) = c$ 和 r
- $NE = (M, c)$
- 两个人的效用都没有最大化

玩家 2

玩家 1		ℓ	c	r
	U	$0, 2$	$2, \underline{3}$	$4, \underline{3}$
玩家 1	M	$\underline{11}, 1$	$\underline{3}, \underline{2}$	$0, 0$
	D	$0, \underline{3}$	$1, 0$	$\underline{8}, 0$

可能不止一个纳什均衡

- 策略 U 弱占优于策略 D，策略 ℓ 弱占优于策略 r
- (U, ℓ) 和 (D, r) 都是纳什均衡，玩家们都没有动机通过偏离而变得更好
- 但 (D, r) 是不如意的

玩家 1 \ 玩家 2	ℓ	r
U	$\underline{1}, \underline{1}$	$\underline{0}, 0$
D	$0, \underline{0}$	$\underline{0}, \underline{0}$

回顾三个概念

- 占优（Dominance）、最优反应（Best response）、纳什均衡（Nash equilibrium）
- 占优和纳什均衡之间的关系，以囚徒困境为例
  - 策略 α 严格占优于策略 β
  - $NE = (\alpha, \alpha)$
  - 纳什均衡不一定是最优解决方案
- 在一个纳什均衡中不可能存在一个严格劣势的策略，因为这个策略永远不会是最优反应

投资游戏

- 玩家：全体同学（多人游戏，不允许沟通）
- 策略：投资 0 或 10 万元
- 效用：

$$\text{净利润} = \begin{cases} 0, & \text{如果不投资} \\ 5, & \text{如果投资 10 万元且不少于 90\% 的同学投资} \\ -10, & \text{如果投资 10 万元但少于 90\% 的同学投资} \end{cases}$$

- 结果统计（期望效用、对他人没有信心、市场氛围预测）
- 策略性互补游戏（Strategic complements）：别人越可能投资，你也越可能投资；别人越可能努力，你也越可能努力

游戏分析

- 纳什均衡
  - 先猜后验证
  - 纳什均衡是都投资或者都不投资，前者帕累托优于后者
- 再玩一次又一次，结果会很快趋向于都不投资（第一次游戏结果非常重要）
- 开一个动员会，看结果是否反转
- 投资游戏属于协调博弈（Coordination game）
  - 当选择与其他玩家相同的行为时，玩家将获得更高的效用
  - 投资并不占优于不投资
  - 存在多个纳什均衡，有好有坏
  - 与囚徒困境不同，沟通和领导者会起作用，往好的均衡发展
  - 举例：集体活动人多才有意思或者都去同一个地方玩、都用同一款产品、潮流、执行同一个技术标准、银行挤兑（从好的均衡变为坏的均衡）

约会游戏（Battle of the sexes）

- 一对情侣要去电影院约会，约好在播放厅见面
- 但他们忘记事先确定看哪一部电影了
- 需要决定去哪个播放厅等待对方
- 有请班对写下各自的选择，然后沟通后再写一次

		女生 A	女生 B	女生 C
男生	A	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$	$\underline{0}, -1$
男生	B	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$	$\underline{0}, -1$
男生	C	$-1, \underline{0}$	$-1, \underline{0}$	$-2, -2$

游戏分析

- C 是一个劣势策略
- 存在两个均衡，$NE = (A, A)$ 和 (B, B)。双方偏好不同，男生最想实现第一个均衡，女生最想实现第二个均衡
- 存在潜在冲突的可能，有一方必须让步

		女生		
		A	B	C
	A	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$	$\underline{0}, -1$
男生	B	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$	$\underline{0}, -1$
	C	$-1, \underline{0}$	$-1, \underline{0}$	$-2, -2$

Thanks!